Lançamento de projéteis

01)

Dados:

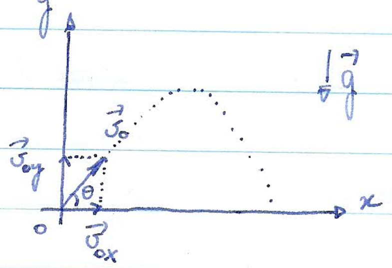
$v_0 = 20\ m/s$

$\theta = 53^\circ$

$g = 10\ m/s^2$

$sen\ \theta = 0,8$

$cos\ \theta = 0,6$



$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 . \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 . sen\theta \end{cases}$$

→ Para o movimento em x (MU):

$x = x_0 + v_{0x} . t$

$v_x = v_{0x} = constante$

→ Para o movimento em y (MUV):

$y = y_0 + v_{0y} . t + \frac{1}{2} a_y . t^2$

$v_y = v_{0y} + a_y . t$

$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2 . a_y . \Delta y$

No ponto mais alto da trajetória (altura máxima H) v_y é zero. Temos:

$v_y = v_{0y} + a_y . t_s$

$0 = v_0 sen\varphi + (-g) . t_s$

$\therefore \boxed{t_s = \frac{v_0 sen\varphi}{g}}$ → Tempo de subida

O tempo de subida é igual ao tempo de descida. Logo o tempo de voo é:

$$\boxed{t_v = 2 . t_s = \frac{2 v_0 sen\varphi}{g}}$$

Então, $t_v = \frac{2 . (20\ m/s) . (0,8)}{(10\ m/s^2)} = 3,2\ s$ (b)

02)

Dados:

$v_0 = 72\ Km/h = 20\ m/s$

$\theta = 30^\circ$

$g = 10\ m/s^2$

$sen\ \theta = 0,50$

$cos\ \theta = 0,87$

Aplicando a equação de Torricelli e sabendo que na altura máxima $v_y = 0$ temos:

$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2 a_y . \Delta y$

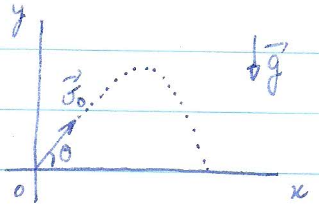
$0 = (v_0 sen\theta)^2 + 2(-g) . H$

$0 = (v_0 sen\theta)^2 - 2gH$

$\therefore H = \frac{(v_0 sen\theta)^2}{2g}$

$H = \frac{(20\ m/s . 0,5)^2}{2(10\ m/s^2)}$

$H = 5,0\ m$ (a)



03) O alcance horizontal é alcançado quando t é igual ao tempo de voo.

Dados:

$v_{0x} = 5{,}0\,m/s$

$v_{0y} = 8{,}0\,m/s$

$g = 10\,m/s^2$

Para o movimento em x:

$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$

E para o tempo de voo:

$t_v = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen}\varphi}{g} = \dfrac{2v_{0y}}{g}$

Quando $t = t_v \rightarrow x = a_h$

$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$

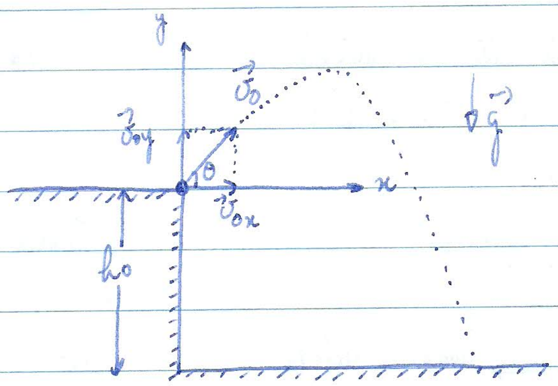
$a_h = 0 + v_{0x} \cdot \left(\dfrac{2v_{0y}}{g}\right)$

$\therefore \boxed{a_h = \dfrac{2v_{0x} \cdot v_{0y}}{g}}$

$a_h = \dfrac{2 \cdot (5{,}0\,m/s) \cdot (8{,}0\,m/s)}{(10\,m/s^2)}$

$\therefore a_h = 8{,}0\,m$ (b)

04)



$\begin{cases} v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta \\ v_{0x} = v_0 \cos\theta \end{cases}$

Dados:

$h_0 = 12{,}8\,m$

$v_0 = 72\,km/h = 20\,m/s$

$\theta = 37^\circ$

$\operatorname{sen}\theta = 0{,}6$

$\cos\theta = 0{,}8$

A equação horária das alturas para a pedra é:

$h(t) = h_0 + v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

Quanto t for o tempo de voo a pedra terá atingido o chão ($h = 0$).

$h(t = t_v) = 0$

$0 = h_0 + v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$

$\boxed{\dfrac{gt^2}{2} - v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot t - h_0 = 0}$

$\Delta = (-v_0 \operatorname{sen}\theta)^2 - 4\left(\tfrac{1}{2}g\right) \cdot (-h_0)$

$\Delta = v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2g h_0$

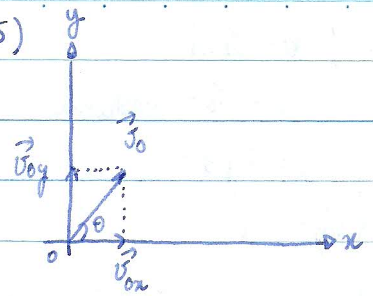
$t = \dfrac{-(-v_0 \operatorname{sen}\theta) \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2g h_0}}{2 \cdot (\frac{1}{2} g)}$

$t = \dfrac{v_0 \operatorname{sen}\theta \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2g h_0}}{g}$

$t = \dfrac{(20 \cdot 0{,}6) \pm \sqrt{(20 \cdot 0{,}6)^2 + 2(10) \cdot (12{,}8)}}{10}$

$\boxed{t' = 3{,}2\,s}$ (b)

$t'' = \cancel{-4\,s}$

05) 

O módulo da velocidade em qualquer instante trajetória é dado por:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$v^2 = v_0^2\cos^2\theta + v_0^2 sen^2\theta - 2v_0\, sen\theta . gt + g^2t^2$$

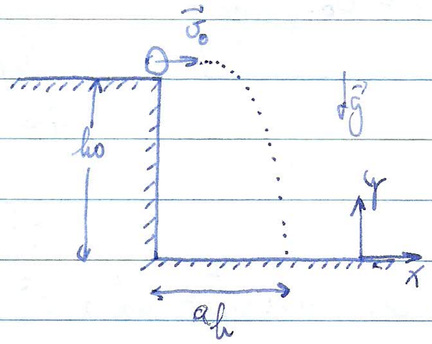
$$v^2 = v_0^2\underbrace{(\cos^2\theta + sen^2\theta)}_{1} + gt(gt - 2v_0\, sen\theta)$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 . \cos\theta \\ v_y &= v_0 . sen\theta - gt \end{aligned}\right\} \text{Em qualquer instante}$$

$$\therefore v = \sqrt{v_0^2 + gt(gt - 2v_0\, sen\theta)} \quad (e)$$

06)

Dados:
$h_0 = 20{,}0 m$
$a_h = \frac{h_0}{2} = 10{,}0 m$
$g = 10 m/s^2$



$$\begin{cases} x = v_0 . t \\ y = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Quando o t for igual ao tempo de queda y será zero.

$$0 = h_0 - \frac{1}{2}g t_q^2$$

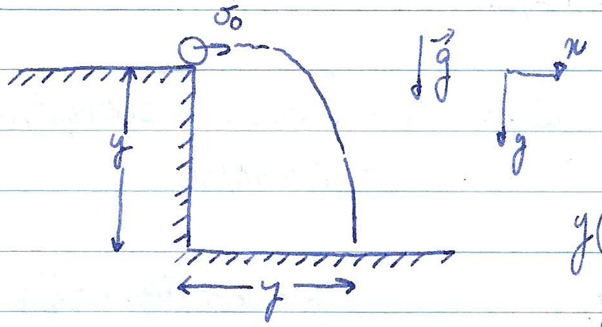
$$x = v_0 . t$$

$$a_h = v_0 . t_q = v_0 . \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \qquad \therefore t_q = +\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

$$\boxed{v_0 = a_h\sqrt{\frac{g}{2h_0}}} \qquad v_0 = (10{,}0 m) . \sqrt{\frac{(10 m/s^2)}{2(20{,}0 m)}}$$

$$\therefore v_0 = 5{,}0 m/s \quad (a)$$

07)



$$\begin{cases} x = v_0 . t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$y(t_q) = y = \frac{1}{2}g t_q^2$$

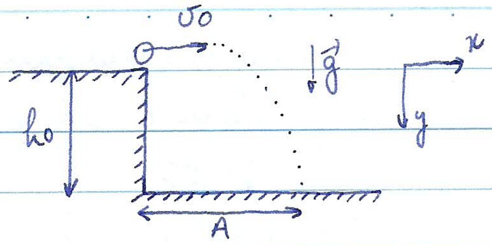
$$t_q = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$x = v_0 . t$$

$$x(t_q) = y = v_0 . \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$v_0 = y\sqrt{\frac{g}{2y}} = \sqrt{\frac{gy^2}{2y}} = \sqrt{\frac{g.y}{2}} \quad (e)$$

08)



Dados:

$v_0 = 20\,m/s$

$h_0 = 20\,m$

$g = 10\,m/s^2$

$$\begin{cases} x = v_0 . t \\ v_x = v_0 = \text{constante} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y = g.t \\ v_y^2 = 2g\Delta y \end{cases}$$

• y para $t = t_v$ é igual a h_0.

$$h_0 = \frac{1}{2} g t_v^2$$

$$\therefore \boxed{t_v = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$$

• x para $t = t_v$ é igual a A

$$\therefore \boxed{A = v_0 . \sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$$

Temos:

$$A = (20\,m/s) . \sqrt{\frac{2(20\,m)}{(10\,m/s^2)}}$$

$$\therefore \boxed{A = 40\,m}$$

O módulo da velocidade é dado por: $v_f^2 = v_x^2 + v_y^2$

$\boxed{v_x = v_0}$

v_y do corpo imediatamente antes de atingir o solo é dada por:

$$\cancel{v_y = g . t_q} \quad v_y = g . t_v = g\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

$$\therefore \boxed{v_y = \sqrt{2gh_0}}$$

A velocidade do corpo ao atingir o solo é então:

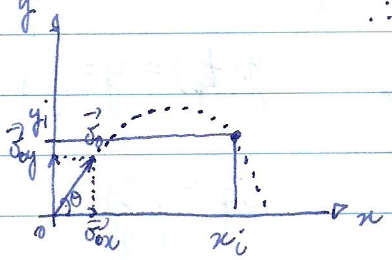
$$v_f^2 = v_0^2 + (\sqrt{2gh_0})^2 = v_0^2 + 2gh_0$$

$$\therefore v_f = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} //$$

Logo: $v_f = \sqrt{(20\,m/s)^2 + 2(10\,m/s^2)(20\,m)}$

$\therefore v_f \simeq 28{,}3\,m/s$

09) Dados:



$v_0 = 15{,}0\,m/s$

$x_i = 18{,}0\,m$

$\text{sen}\,\theta = 0{,}6$

$\cos\theta = 0{,}8$

$$\begin{cases} y = y_0 + v_{0y} . t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y = v_{0y} - g . t \\ v_y^2 = v_{0y}^2 - 2a\Delta y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} . t \\ v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta \end{cases}$$

⇒ O tempo em que a bola atinge a posição x_i de interceptação é dado por:

$$x_i = v_{0x} \cdot t_i$$

$$\therefore \boxed{t_i = \frac{x_i}{v_{0x}}}$$

⇒ A altura da interceptação é dada por:

$$h_i = v_{0y} \cdot \left(\frac{x_i}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x_q}{v_{0x}}\right)^2$$

Então: $h_i = (18{,}0\,m) \cdot \left(\frac{15{,}0\,m/s \cdot 0{,}6}{15{,}0\,m/s \cdot 0{,}8}\right) - \frac{1}{2}(10\,m/s^2) \cdot \left(\frac{18{,}0\,m}{15{,}0\,m/s \cdot 0{,}8}\right)^2$

$$\therefore h_i = 2{,}25\,m$$

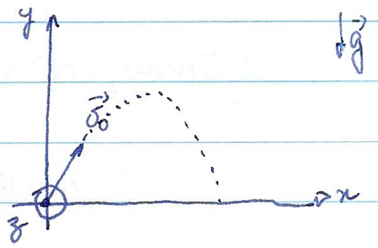
10)

Dados:

$A = 50m$

$v_{0x} = 10 m/s$

$g = 10 m/s^2$



$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} \cdot t \\ v_x = v_{0x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y = v_{0y} - g t \\ v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g \Delta y \end{cases}$$

⇒ $x = A \rightarrow t = t_v$:

$$A = v_{0x} \cdot t_v$$

$$\therefore \boxed{t_v = \frac{A}{v_{0x}}}$$

O tempo de subida é igual a $\frac{1}{2} t_v$.

Temos: $\boxed{t_s = \frac{A}{2 v_{0x}}}$

⇒ $t = t_s \rightarrow v_y = 0$

$$0 = v_{0y} - g \cdot t_s$$

$$\boxed{g \cdot \frac{A}{2 v_{0x}} = v_{0y}}$$

Logo, $v_{0y} = \frac{(10 m/s^2) \cdot (50 m)}{2 (10 m/s)}$

$\therefore v_{0y} = 25 m/s$ // (a)

11)

Dados:

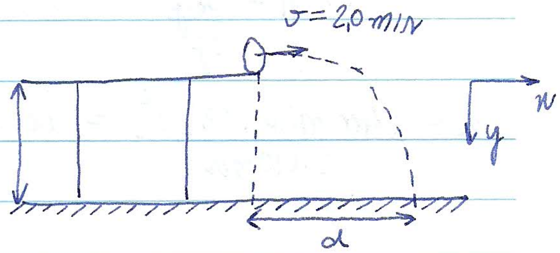
$m = 200g$

$v = 2 m/s$

$h_0 = 1{,}8 m$

Fazendo uso de relações obtidas em exercícios anteriores, temos:

$$t_v = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad e \quad d = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$



$$d = (2 m/s) \cdot \sqrt{\frac{2(1{,}8 m)}{(10 m/s^2)}} = 1{,}2 m \text{ (e)}$$

12)

Dados:

$v_{oy} = 18 m/s$

$v_{ox} = 5,0 m/s$

Usando a equação de Torricelli:

$v_y^2 = v_{oy}^2 - 2g\Delta y$

Quando $\Delta y = H \rightarrow v_y = 0$

$0^2 = v_{oy}^2 - 2gH$

$\therefore \boxed{H = \frac{v_{oy}^2}{2g}}$

Então, $H = \frac{(18 m/s)^2}{2(10 m/s^2)}$

$\therefore H = 16,2 m$

O tempo de voo é dado por:

$t_v = \frac{2 \cdot v_{oy}}{g}$.

Quando $t = t_v \rightarrow x = A$ em $x = v_{ox} \cdot t$.

$\therefore \boxed{A = \frac{2 v_{ox} \cdot v_{oy}}{g}}$

Então, $A = \frac{(5,0 m/s) \cdot 2(18 m/s)}{(10 m/s^2)}$

$\therefore A = 18,0 m$

a

13)

Dados:

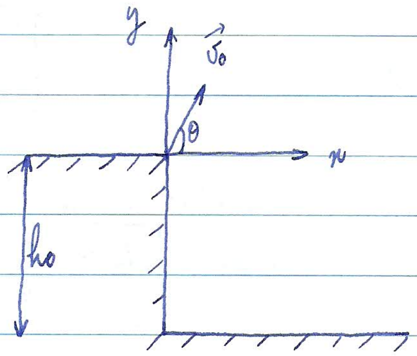
$\theta = 60°$

$h_o = 1000 m$

$v_o = 1440 km/h$

$= 400 m/s$

$g = 10 m/s^2$



→ Aplicando a equação de Torricelli podemos determinar a altura máxima que a parte do foguete alcança a partir do ponto onde ela se desprendeu.

$v_y^2 = v_{oy}^2 - 2g\Delta y$

Quando $\Delta y = h \rightarrow v_y = 0$. Temos:

$0^2 = v_{oy}^2 - 2gh$

$\therefore H = \frac{v_{oy}^2}{2g} = \frac{(v_o \cdot sen\theta)^2}{2g}$

$h = \frac{(400 m/s \cdot \sqrt{3}/2)^2}{2 \cdot (10 m/s^2)} = 6000 m$

A altura máxima em relação ao solo é dada por:

$h_m = h + h_o$

$h_m = 6000 m + 1000 m$

$\therefore h_m = 7000 m$

/ /

14) A velocidade vertical necessária para que o jogador ~~alcance~~ atinja a altura h é dada por:

Dados:
$h = 1{,}25\,m$

$$v_y^2 = v_{oy}^2 - 2gh$$
$$0^2 = v_{oy}^2 - 2gh$$
$$\therefore v_{oy} = \sqrt{2gh}$$

O tempo que o jogador leva para alcançar a altura h é:

$$v_y = v_{oy} - gt$$
$$0 = \sqrt{2gh} - g\,t_s$$
$$t_s = \frac{\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Como o tempo de ~~ts~~ subida é igual ao tempo de descida, o tempo total é dado por:

$$t_t = 2\,t_s = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Logo, $t_t = 2 \cdot \sqrt{\frac{2(1{,}25m)}{(10m/s^2)}} = 1s$ @

~||~